

# Physik III - Anfängerpraktikum- Versuch 354

Sebastian Rollke (103095) und Daniel Brenner (105292)

21. September 2005

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Zielsetzung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
2.1	Gedämpfte Schwinungen . . . . .	2
2.1.1	Schwingfall . . . . .	3
2.1.2	Kriechfall . . . . .	3
2.1.3	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	3
2.2	Erzwungene Schwingungen . . . . .	3
2.3	Impedanz . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Der vermessene RCL-Kreis . . . . .	6
4.2	Gedämpfte Schwingung . . . . .	6
4.3	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	7
4.4	Erzwungene Schwingungen . . . . .	7
4.5	Phasenverschiebung der Spannung am Kondensator . . . . .	11
4.6	Impedanzbestimmung . . . . .	14

# 1 Einleitung und Zielsetzung

Die hier untersuchten RLC-Kreise, wie ihr Name schon sagt bestehend aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator, sind Stromkreise in denen die elektrische Energie ständig zwischen Spule und Kondensator hin und her schwingt. Bei dem Widerstand wird dabei stets ein Teil der Energie in Wärme gewandelt wodurch eine Dämpfung als Funktion der Zeit entsteht. Darüber hinaus lässt sich eine Schwingung erzwingen indem man mit Hilfe eines Sinus-Generators eine Spannung einspeißt. Beides soll wie auch der Scheinwiderstand dieses Stromkreises bestimmt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Gedämpfte Schwingungen

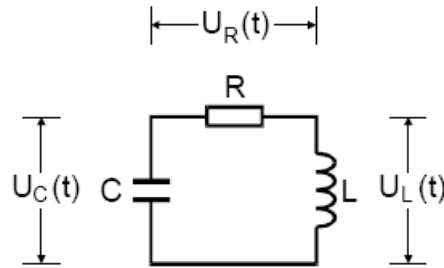


Abbildung 1: Gedämpfter Schwingkreis

Zuerst betrachten wir nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz (Maschenregel) den Schaltkreis und stellen für diesen die Gleichung nach Abbildung 1

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

auf. Daraus folgt direkt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (2)$$

Zur Lösung dieser nutzt man den Ansatz

$$I(t) = A e^{i\tilde{\omega}t} \quad (3)$$

mit der komplexen Zahl  $A$  und der Konstanten  $\tilde{\omega}$

$$\tilde{\omega}_{1,2} = i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (4)$$

Zur vereinfachung führen wir nun folgende zwei Abkürzungen ein:

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \text{ und } 2\pi\tilde{\nu} := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5)$$

Nun können wir drei Fälle unterscheiden:

### 2.1.1 Schwingfall

In diesem Fall sei

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \quad (6)$$

wodurch  $\tilde{\nu}$  reell wird. Damit die Lösungsfunktion reell wird:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (A_1 e^{i2\pi\tilde{\nu}t} + {}_2^A e^{-i2\pi\tilde{\nu}t}) \quad (7)$$

muss die Klammer der Lösungsfunktion eine rein oszillatorische sein. Die Exponentialfunktion vor der Klammer charakterisiert dabei die Einhüllende der Schwingung und der Klammersausdruck kennzeichnet die Schwingung innerhalb dieser Einhüllenden. Dieser Fall stellt also eine gedämpfte harmonische Schwingung da.

### 2.1.2 Kriechfall

Bei diesem Fall sei

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \quad (8)$$

also  $\tilde{\nu}$  ist imaginär. In dieser Lösung gibt es keine oszillatorischen Anteile mehr und keine Schwingungen. Es liegt ein einfaches Relaxationsverhalten vor.

### 2.1.3 Aperiodischer Grenzfall

Dieser Fall liegt vor wenn

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \quad (9)$$

hierbei geht es ohne Überschwingungen am schnellsten gegen null.

## 2.2 Erzwungene Schwingungen

Legt man an den Schwingkreis eine äußere periodische Spannung  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  an, so erhält man für die Differentialgleichung (2):

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = U_0 e^{i\omega t} \quad (10)$$

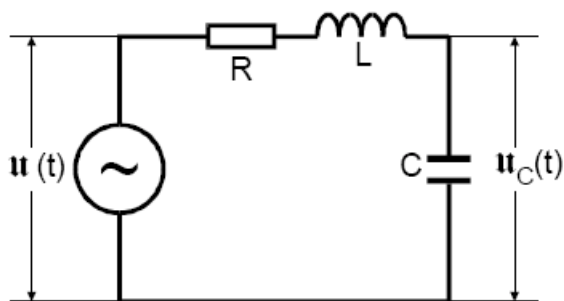


Abbildung 2: Erzeugung einer erzwungenen Schwingung in einem elektrischen Schwingkreis

Aufgelöst ergibt sich für die Amplitude  $A(t)$  der Kondensatorspannung:

$$A(t) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (11)$$

$$|A(t)| = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (12)$$

Für den Phasenunterschied zwischen Erregerspannung und Kondensatorspannung gilt:

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{Im}(A(t))}{\text{Re}(A(t))} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \quad (13)$$

Und die Kondensatorspannung ist schließlich:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (14)$$

Diskutiert man nun die Gleichung (14), so stellt man fest das bei einer endlichen Frequenz die Kondensatorspannung ein Maximum das größer als die Erregerspannung sein kann, erreicht. Dieses Phänomen nennt man Resonanz und die Frequenz Resonanzfrequenz:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (15)$$

Der Faktor um den die Kondensatorspannung erhöht ist, nettt man Resonanzüberhöhung oder Güte  $q$  und ist gegeben durch:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \quad (16)$$

Die beiden Frequenzen  $\omega_+$  und  $\omega_-$  sind genau die Frequenzen, bei denen die Kondensatorspannung auf den Bruchteil  $1/\sqrt{2}$  seines Maximalwertes abgesunken ist und sie sind daher gegeben durch:

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{U_0}{C \sqrt{\omega_{\pm}^2 R^2 + (\omega_{\pm}^2 L - 1/c)^2}} \quad (17)$$

Analog dazu folgt aus (13) für die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , bei denen  $\varphi$  gerade  $\pi/4$  oder  $\frac{3}{4}\pi$  ist:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (18)$$

### 2.3 Impedanz

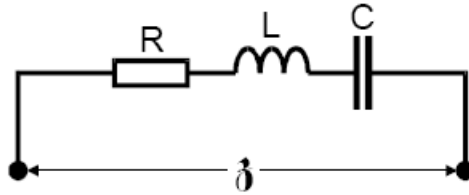


Abbildung 3: Der Serienschwingkreis als Zweipol

Die Impedanz eines Schwingkreises errechnet sich durch die in Abbildung 3 dargestellte Reihenschaltung der Widerstände des Kondensators (mit  $Z_C = -i\frac{1}{\omega C}$ ), der Spule (mit  $Z_L = i\omega L$ ) und des Widerstandes ( $Z_R = R$ ). Daraus folgt:

$$Z_C = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (19)$$

## 3 Durchführung

Für die Messung der Zeitabhängigkeit wird die gedämpfte Schwingung mit einem Tastkopf aufgenommen und auf einem Oszilographen sichtbar gemacht. Ein Thermoausdruck am Speicheroszilographen ermöglicht die Auswertung.

Der aperiodische Grenzfall wird untersucht, indem der Widerstand gegen einen Regelwiderstand ausgetauscht wird und von seinem Maximalwert vermindert wird, bis eine erste Überschwingung zu erkennen ist. Erhöht man ihn wieder bis diese gerade verschwindet, so hat man  $R_{ap}$  gefunden.

Die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung wird gemessen, indem man den Oszilographen durch ein Millivoltmeter ersetzt und einen Sinusgenerator für die Erregerspannung dazu schaltet.

Die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung wird durch ein Zweistrahloszilloskop dargestellt auf dem beide Spannungen auf getrennten Kanälen angelegt sind, wodurch man die Phasendifferenz ablesen kann. Gleichzeitig wird die Frequenz mit einem Frequenzzähler gemessen.

Der Scheinwiderstand wird schließlich mit einem Impedanzmeter ermittelt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Der vermessene RCL-Kreis

Der von uns vermessene RCL-Kreis "Gerät 1" besitzt die in Tabelle 1 angegebenen Daten.

Größe	Wert	Fehler +/-	Einheit	Fehler %
L	0,02	0,00009	H	0,53%
C	2,07E-009	6,00E-012	F	0,29%
$R_1$	67,2	0,2	$\Omega$	0,30%
$R_2$	682	1	$\Omega$	0,15%

Tabelle 1: Kenndaten von "Gerät 1"

### 4.2 Gedämpfte Schwingung

Aus dem Thermodruck des Speicheroszilloskops entnehmen wir die in Tabelle 2 aufgelisteten Werte.

x - abstand [cm]	y- abstand [cm]	Zeit [ms]	Spannung [V]
0,0	4,5	0,0	0,45
0,5	3,7	0,1	0,37
1,0	3,0	0,2	0,30
1,5	2,3	0,3	0,23
2,0	1,9	0,4	0,19
2,5	1,4	0,5	0,14
3,0	1,0	0,6	0,10
3,5	0,8	0,7	0,08
4,0	0,7	0,8	0,07
4,5	0,5	0,9	0,05
5,0	0,4	1,0	0,04
5,5	0,3	1,1	0,03
6,0	0,3	1,2	0,03
7,0	0,2	1,4	0,02

Tabelle 2: Auswertung des Thermodrucks

Durch lineare Regression (aus der sich auch die Fehler ergeben) mit den logarithmierten Werten ergibt sich der Exponent der einhüllenden Funktion nach

$$2\pi\nu = 2344,5 \pm 58,4[1/s]$$

Der effektive Dämpfungswiderstand berechnet sich nach:

$$4\pi\nu \cdot L = 79,76 \pm 2,03[\Omega]$$

Der Fehler ergibt sich durch

$$r_R = \sqrt{r_L^2 + r_\nu^2}$$

(jeweils mit  $r_i$ , den relativen Fehlern der jeweiligen Größen)

Man erkennt eine deutliche Abweichung zwischen dem verbauten Widerstand ( $R_1$ ) und dem tatsächlich auftretenden. Die Begründung dafür ließen zusätzlichen Ohmschen Verlusten in der Spule bzw. den Leitungen.

Zusätzlich erhalten wir die Abklingdauer

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\nu} = 0,43 \pm 0,01 [ms]$$

Der Fehler ergibt sich nach

$$r_T = r_\nu$$

### 4.3 Aperiodischer Grenzfall

Wir erhielten durch Messung den Wert  $R_{AP} = 5,40 k\Omega$ .

Wir berechnen

$$R_{AP} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 5,74 \pm 17,32 [k\Omega]$$

Der Fehler ergibt sich nach

$$r_R = \sqrt{\frac{1}{4}r_L^2 + \frac{1}{4}r_C^2}$$

Zwischen beiden Werten gibt es einen Unterschied von  $\approx 5,9\%$ . Sie stimmen also recht gut überein.

### 4.4 Erzwungene Schwingungen

Wir erhielten die in Tabelle 3 angegebenen Werte. Um die Frequenzabhängigkeit des Tastkopfes zu berücksichtigen dividieren wir die gemessene Spannung am Kondensator ( $U_C$ ) durch die des Tastkopfes ( $U_T$ ).

Die Diagramme 1 und 2 zeigen die Daten. Diagramm 2 zeigt einen "vergrößerten" Abschnitt um die Resonanzfrequenz. Die eingezeichneten Linien zeigen dabei jeweils, wo die Spannung wieder auf ein  $1/\sqrt{2}$  des Maximums abgesunken ist.

Wir lesen eine Resonanzfrequenz von ca. 26,519 kHz aus dem Diagramm ab.

Wir lesen eine Resonanzüberhöhung von  $\approx 4,0$  aus dem Diagramm ab. Gerechnet ergibt sich

$$q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 4,21 \pm 0,01$$

Der Fehler berechnet sich nach:

$$r_q = \sqrt{r_R^2 + \frac{1}{4}r_L^2 + \frac{1}{4}r_C^2}$$

Man sieht eine recht gute Übereinstimmung (Differenz von ca. 4%).

Wir betrachten die Breite der Resonanzkurve indem wir die Frequenzen ermitteln, wo die Spannung auf  $\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$  abgesunken ist.

Wir lesen aus dem Diagramm dazu die Frequenzen  $\nu_- = 22,5 kHz$  und  $\nu_+ = 30,0 kHz$  ab.

Die Differenz dieser beiden Frequenzen ergibt nun die Breite  $b$  der Resonanzkurve.

$$b = \nu_+ - \nu_- = 7,5 [kHz]$$

$\nu$ [kHz]	$U_C$ [V]	$U_T$ [V]	$U_C/U_T$	$\ln(U_C/U_T)$
1,006	0,94	1,30	0,72	-0,32
5,012	1,32	1,30	1,02	0,02
9,998	1,55	1,35	1,15	0,14
15,071	1,93	1,35	1,43	0,36
20,012	2,80	1,35	2,07	0,73
21,047	3,10	1,35	2,30	0,83
22,072	3,58	1,35	2,65	0,98
22,995	4,05	1,35	3,00	1,10
24,090	4,61	1,35	3,41	1,23
25,104	5,28	1,35	3,91	1,36
26,097	5,50	1,35	4,07	1,40
26,519	5,48	1,34	4,09	1,41
27,031	5,32	1,35	3,94	1,37
28,011	4,85	1,35	3,59	1,28
29,066	4,11	1,35	3,04	1,11
30,094	3,45	1,35	2,56	0,94
35,071	1,20	1,36	0,88	-0,13
39,996	1,02	1,36	0,75	-0,29
45,009	0,71	1,37	0,52	-0,66
49,977	0,51	1,37	0,37	-0,99
60,181	0,31	1,37	0,23	-1,49
70,385	0,21	1,36	0,15	-1,87
80,107	0,15	1,38	0,11	-2,22
90,358	0,11	1,36	0,08	-2,51
101,084	0,09	1,39	0,06	-2,74

Tabelle 3:  $U_C$  in Abhängigkeit der Frequenz



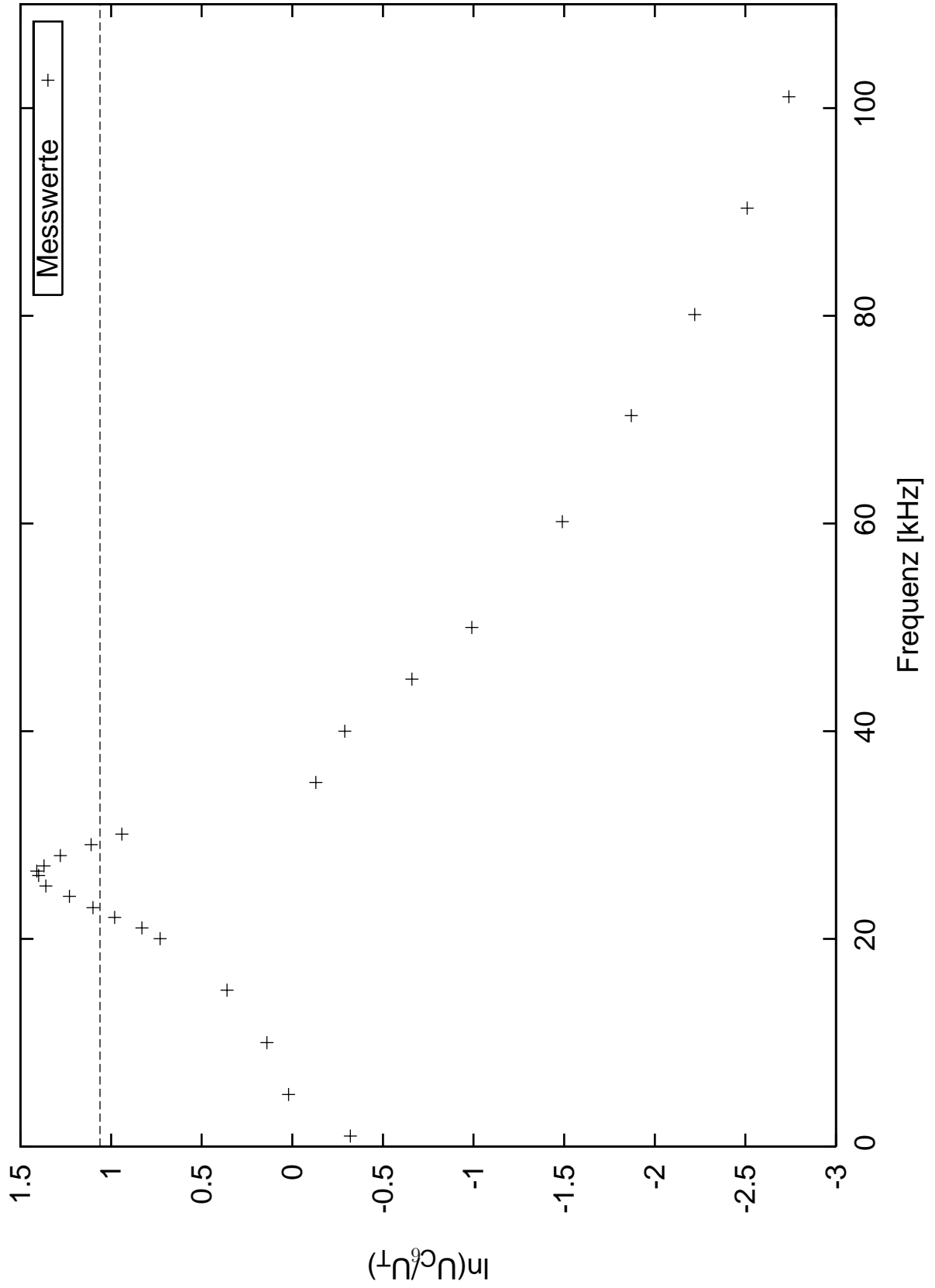


Abbildung 4:  $U_C$  in Abhängigkeit der Erregerfrequenz

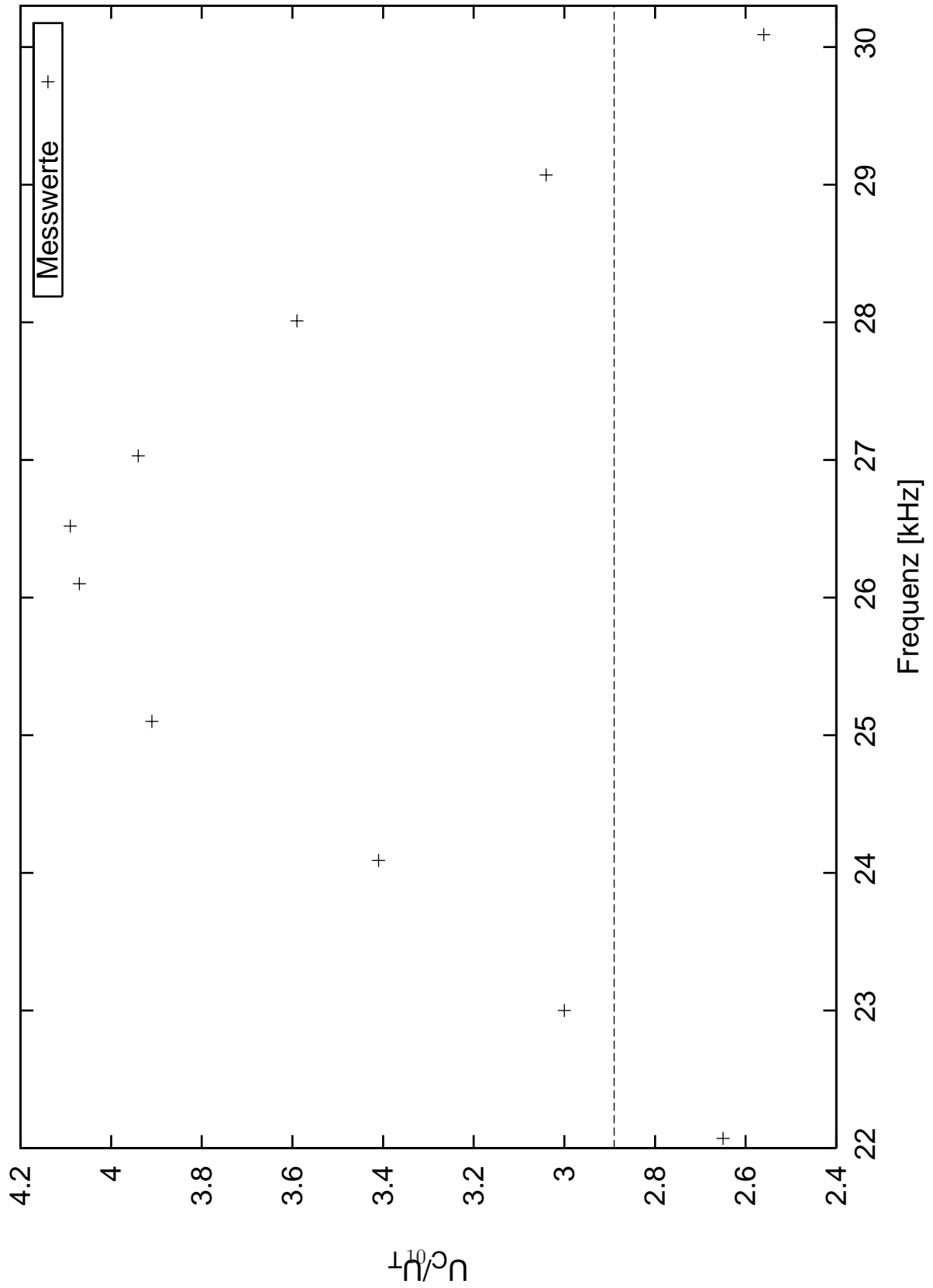


Abbildung 5:  $U_C$  in Abhängigkeit der Erregerfrequenz (linear)

Wir erhalten ein berechnetes

$$b \approx \frac{R}{2\pi L} = 6,38 \pm 0,04 kHz$$

Der Fehler ergibt sich nach

$$r_b = \sqrt{r_R^2 + r_L^2}$$

Man erkennt eine erhebliche Abweichung (ca. 15 %) zwischen beiden Werten. Die Abweichung ergibt sich durch die nur sehr ungenaue graphische Bestimmung der beiden Grenzfrequenzen.

#### 4.5 Phasenverschiebung der Spannung am Kondensator

Durch die Messung der Phase zwischen der Spannung am Netzteil und der der Spannung am Kondensator erhalten wir die in Tabelle 4 angegebenen Werte.

Frequenz [kHz]	Kurvenabstand[Kästchen]	Time div. [ $\mu s$ / Kästchen]	Phasendiff. [grad]
1,051	0,8	-	0
5,108	0,2	20	7,36
10,075	0,2	5	3,63
15,070	0,3	5	8,14
20,483	0,6	5	22,12
22,080	0,7	5	27,82
23,997	1,1	5	47,51
26,014	1,6	5	74,92
27,062	2,0	5	97,42
28,012	2,2	5	110,93
30,278	2,5	5	136,25
32,191	2,6	5	150,65
35,047	2,5	5	157,71
40,062	2,3	5	165,86
50,776	1,9	5	173,65
60,675	1,6	5	174,74
80,074	3,1	2	178,73
99,981	2,5	2	179,97

Tabelle 4: Phasenverschiebung am Kondensator

Die Diagramme 3 und 4 zeigen die Messwerte. Das Diagramm 4 wiederum eine lineare Ansicht der Messwerte um die Phasenverschiebung von  $90^\circ$  herum. Zusätzlich in diese eingezeichnet sind jeweils die Frequenzen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  bei denen die Phasenverschiebung dann gerade  $45^\circ$  bzw.  $135^\circ$  beträgt.

Wir finden wieder eine Resonanzfrequenz von  $\nu_{res} \approx 26,5 kHz$ . Wir lesen zudem die Frequenzen  $\nu_1 \approx 23,5 kHz$  und  $\nu_2 \approx 30,3 kHz$ . Wir berechnen die entsprechenden Werte:

$$\begin{aligned} \nu_{res} &= 26847 kHz \text{ Nach } \nu_{res} = 2\pi\sqrt{LC} \\ \nu_1 &= 23846 kHz \text{ Nach (18)} \\ \nu_2 &= 30227 kHz \text{ Nach (18)} \end{aligned}$$

Man erkennt eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

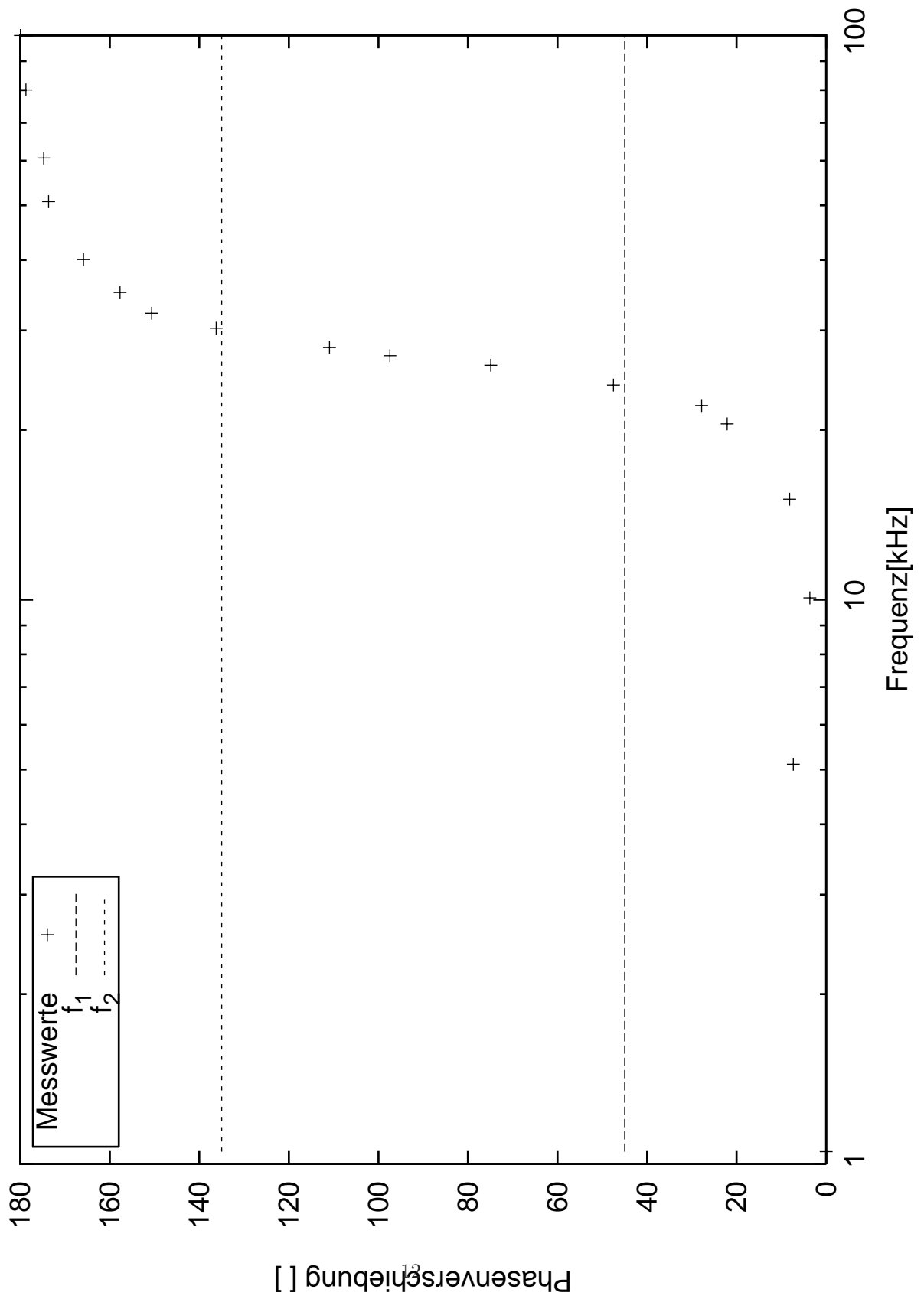


Abbildung 6: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz

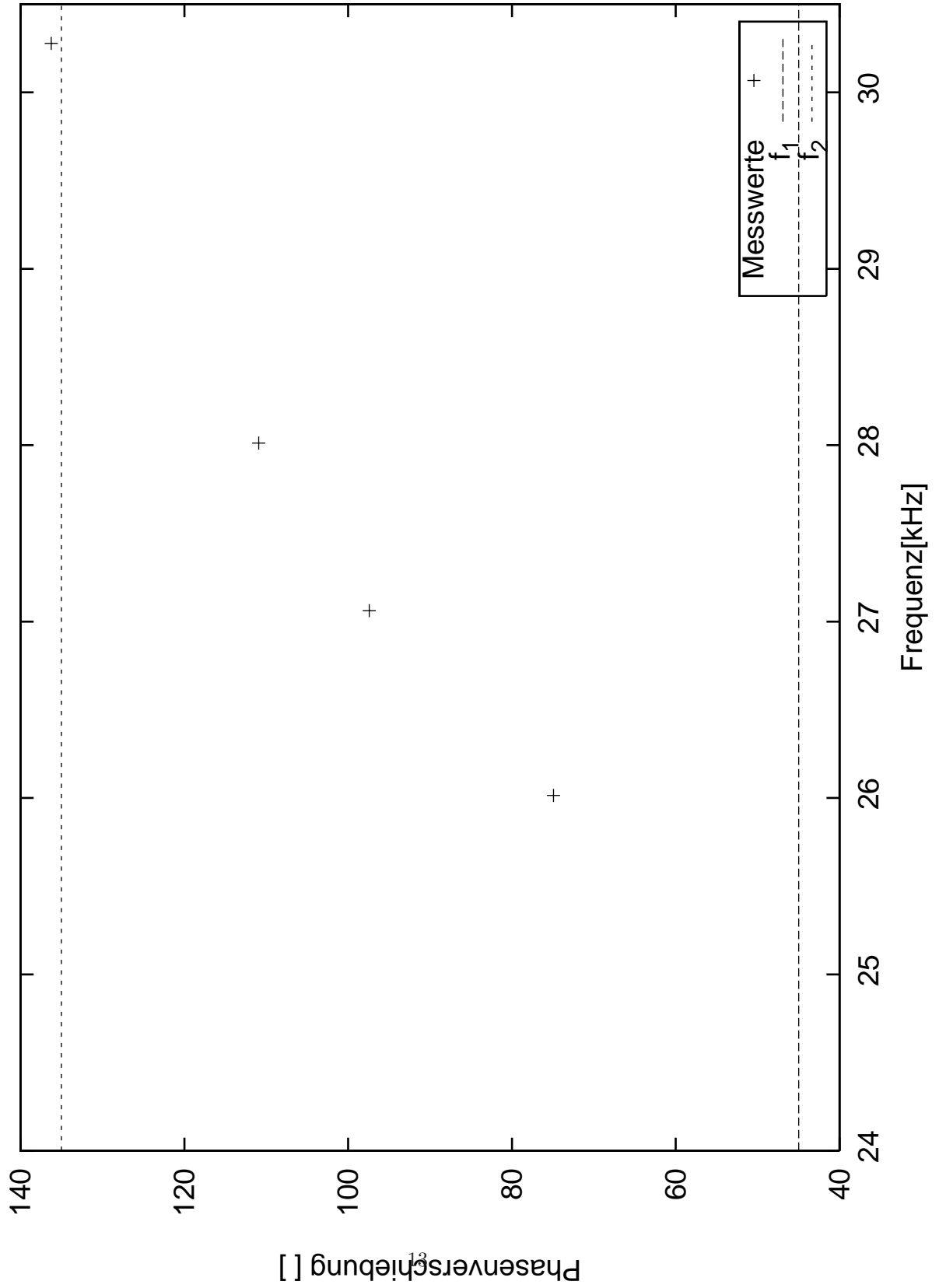


Abbildung 7: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz (linear)

$\nu$ [kHz]	$\omega$ [1/s]	$Z$ [ $\Omega$ ]	$\phi$ [grad]	$Z_{theor.}$ [ $\Omega$ ]
0,5	3142	$1,50 \cdot 10^5$	-90	$1,54 \cdot 10^5$
1	6283	$7,50 \cdot 10^4$	-70	$7,69 \cdot 10^4$
5	31416	$1,50 \cdot 10^4$	-85	$1,49 \cdot 10^4$
10	62832	$6,50 \cdot 10^3$	-70	$6,67 \cdot 10^3$
15	94248	$3,60 \cdot 10^3$	-70	$3,60 \cdot 10^3$
20	125664	$1,90 \cdot 10^3$	-65	$1,84 \cdot 10^3$
22	138230	$1,40 \cdot 10^3$	-60	$1,34 \cdot 10^3$
23	144513	$1,20 \cdot 10^3$	-55	$1,12 \cdot 10^3$
24	150796	$1,00 \cdot 10^3$	-45	$9,39 \cdot 10^2$
25	157080	$8,50 \cdot 10^2$	-35	$7,95 \cdot 10^2$
26	163363	$7,40 \cdot 10^2$	-20	$7,06 \cdot 10^2$
27	169646	$7,00 \cdot 10^2$	0	$6,83 \cdot 10^2$
28	175929	$7,20 \cdot 10^2$	15	$7,23 \cdot 10^2$
30	188496	$9,00 \cdot 10^2$	40	$9,34 \cdot 10^2$
35	219911	$1,70 \cdot 10^3$	67	$1,68 \cdot 10^3$
40	251327	$2,50 \cdot 10^3$	75	$2,45 \cdot 10^3$
45	282743	$3,30 \cdot 10^3$	85	$3,17 \cdot 10^3$
50	314159	$4,00 \cdot 10^3$	88	$3,86 \cdot 10^3$

Tabelle 5: Impedanzbestimmung

## 4.6 Impedanzbestimmung

Mit dem Impedanzmeter erhielten wir die in Tabelle 5 aufgelisteten Messwerte. Die theoretische Impedanz berechnete sich als Betrag der (komplexen Widerstände) nach

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - LC\right)^2}$$

Diagramm 5 stellt die theoretische Impedanz als Kurve dar, sowie die gemessenen Impedanzen. Es fällt eine akzeptable Deckung zwischen Theorie und Experiment auf, wenn man die Genauigkeit des Messinstrumentes betrachtet, daß wegen der Schwankungen der sehr empfindlichen Meßskala nur recht schwer abzulesen war.

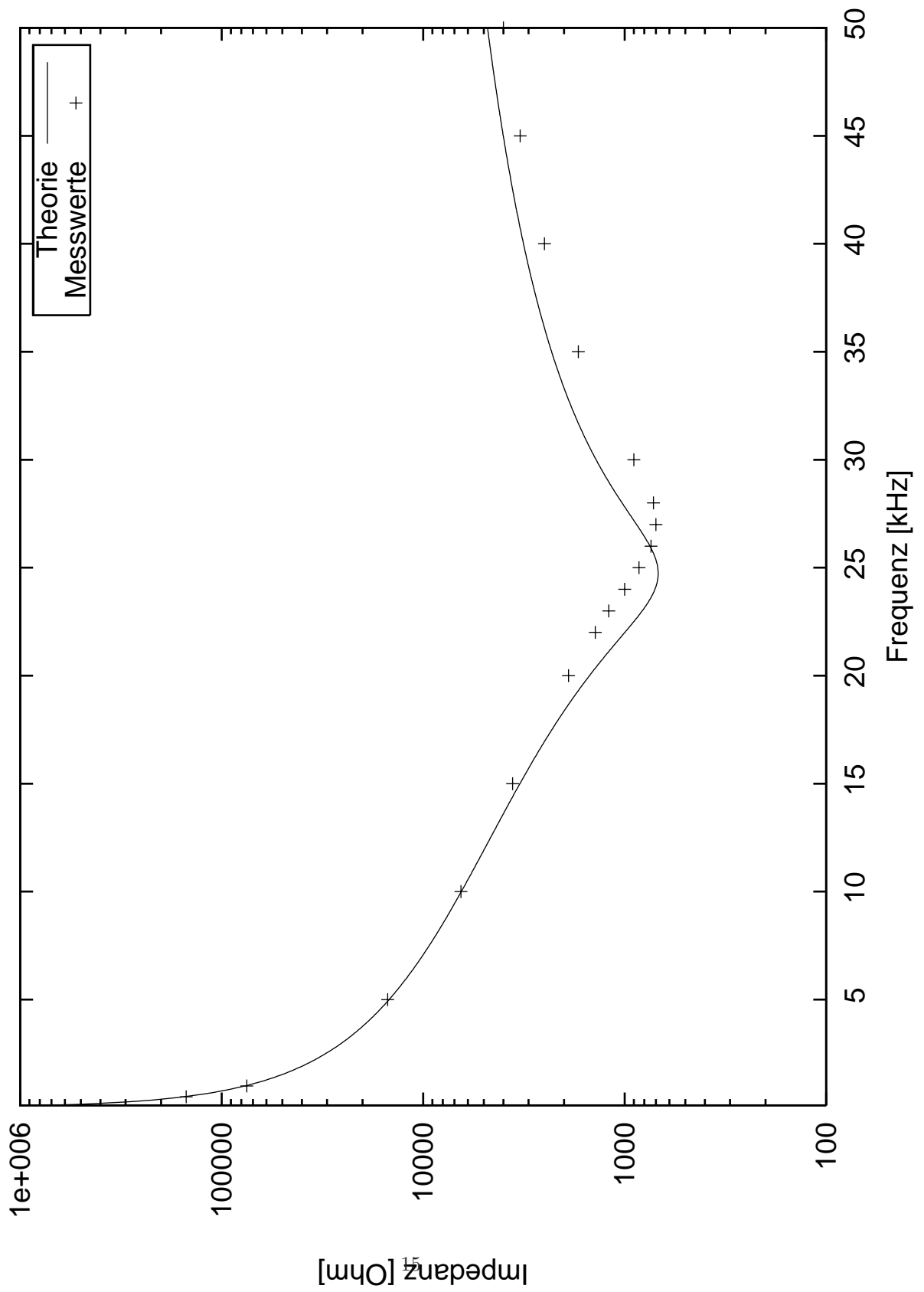


Abbildung 8: Impedanz am Schwingkreis