

Physik III - Anfängerpraktikum- Versuch 302

Sebastian Rollke (103095) und Daniel Brenner (105292)

15. November 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Beschreibung spezieller Widerstandsmessbrücken	4
1.1.1	Wheatstonesche Brücke (Widerstandsmessbrücke)	4
1.1.2	Kapazitätsmessbrücke	4
1.1.3	Induktivitätsmessbrücke	5
1.1.4	Induktivitätsmessung mittels Maxwell-Brücke	6
1.2	Beschreibung spezieller Messbrücken mit Frequenzabhängigkeit . . .	8
1.2.1	Die Wien-Robinson-Brücke	8
2	Auswertung und Durchführung	9
2.1	Widerstandsmessung mit der Wheatstone'schen Brücke	9
2.2	Kapazitätsbestimmung mit der Kapazitätsmessbrücke	10
2.3	Induktivitätsbestimmung mit der Induktivitätsmessbrücke	11
2.4	Induktivitätsbestimmung mit der Maxwell-Brücke	11
2.5	Die Wien-Robinson-Brücke	11
2.6	Klirrfaktormessung	12

1 Theorie

Die Brückenschaltungen kann man benutzen um Potentialdifferenzen, zwischen zwei Punkten auf zwei getrennten Stromkreisläufen zu messen, welche Abhängig von ihren Widerstandsverhältnissen sind.

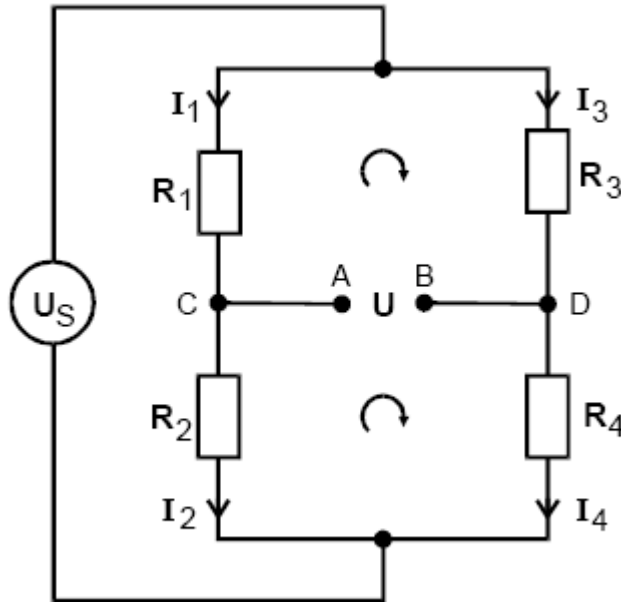


Abbildung 1: Die Brückenschaltung

Die Brückenspannung U_B ist abhängig von der Speisespannung U_s und den Widerständen R_i und wird zwischen den Punkten A und B abgegriffen. Somit lässt sich mit Hilfe der Nullmethode sehr genau ein unbekannter Widerstand mit Hilfe anderer bekannter Widerstände bestimmen. Diese bestimmbareren Widerstände sind jedoch nicht nur auf Ohm'sche Widerstände beschränkt, auch komplexe Widerstände und jede physikalische Größe die sich eindeutig als elektrischer Widerstand darstellen wie etwa die Temperatur oder Längenänderung eines Körpers lassen sich eindeutig und sehr genau bestimmen.

Um die Brückenspannung zu berechnen benutzen wir die Kirchhoffschen Gesetze. Mit diesen errechnet man leicht für die Brückenspannung einen Wert

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S$$

Dieser Ausdruck zeigt die Brückenspannung in Abhängigkeit von der Speisespannung auf. Es lässt sich sehen dass wenn $R_1 R_4 = R_2 R_3$ gilt die Brückenspannung verschwindet unabhängig von der Höhe der Speisespannung da die Abgleichbedingung alleinig von den Verhältnissen der Widerstände abhängt. Hierbei spricht man von der **abgleichenden Brücke**. Mit Hilfe dieser einfachen Schaltung kann man leicht einen unbekanntem Widerstand bestimmen wenn die anderen Widerstände bekannt sind. Hierfür benutzt man zwei bekannte Widerstände und einen regelbaren Widerstand. Die Genauigkeit der Messung hängt selbstverständlich davon ab, wie genau die Werte der drei anderen Widerstände gegeben oder ablesbar sind.

Wenn bei der abgleichenden Brückenschaltung ein komplexer Widerstand bestimmt werden soll, was passiert wenn Induktivitäten oder Kapazitäten in der Schaltung eingebaut sind, muss die Definition etwas erweitert werden. Ein komplexer Widerstand hat allgemein die Form:

$$Z = X + iY$$

wobei i die imaginäre Einheit ist, X der Wirkwiderstand und Y der Blindwiderstand.

Die Widerstandsoperatoren der Kapazitäten C , der Induktivitäten L und der ohmschen Widerstände R haben die Form:

$$Z_C = \frac{-i}{\omega C}$$

$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_R = R$$

wobei ω die Kreisfrequenz der Wechselspannung ist.

Die Abgleichbedingung für komplexe Widerstände ist analog zu Ohm'schen Widerständen

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

doch ausführlich geschrieben müssen also Real- und Imaginärteile übereinstimmen:

$$X_1 X_4 - Y_1 Y_4 = X_2 X_3 - Y_2 Y_3 \text{ und } X_1 Y_4 + X_4 Y_1 = X_2 Y_3 + X_3 Y_2$$

1.1 Beschreibung spezieller Widerstandsmessbrücken

1.1.1 Wheatstonesche Brücke (Widerstandsmessbrücke)

Diese Brückenschaltung beinhaltet nur ohm'sche Widerstände und kann daher sowohl mit Gleich als auch mit Wechselstrom betrieben werden. In der Schaltung soll der unbekannte Widerstand R_X bestimmt werden der nach der allgemeinen Gleichung mit:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

gegeben ist. Da es bei R_3 und R_4 nur auf das Verhältniss zwischen beiden ankommt kann hier ein Potentiometer genutzt werden.

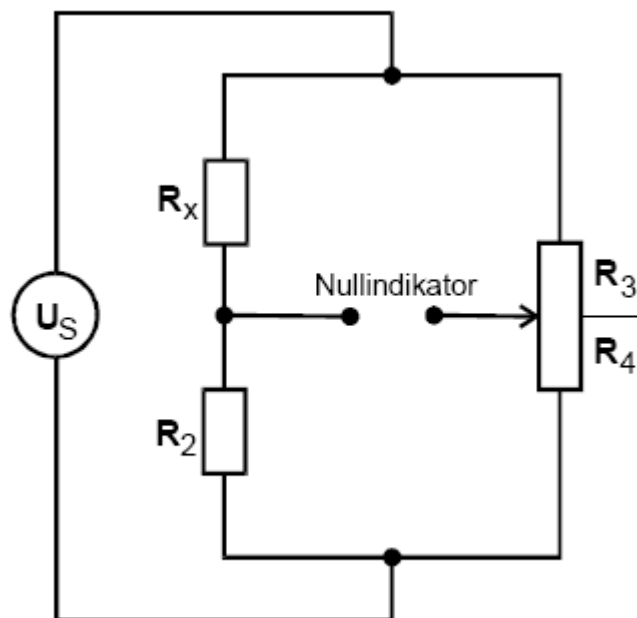


Abbildung 2: Die Wheatstonesche Brücke

1.1.2 Kapazitätsmessbrücke

Da ein realer Kondensator einen nicht vernachlässigbar kleinen Anteil dielektrischer Verluste hat wird hierbei bei der Berechnung der elektrischen Schaltung ein Ersatzschaltbild genutzt, bei dem ein fiktiver ohm'scher Widerstand mit der Kapazität in Reihe geschaltet wird. Der reale Widerstand ist somit:

$$Z_{C_{real}} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Zur Messung von C_x benötigt man also einen zweiten Abstimmfreiheitsgrad zur Kompensation der durch R_x auftretenden Phasenverschiebung. Dieses wird durch einen zu C_2 in reihe geschalteten Regelwiderstand R_2 gegeben.

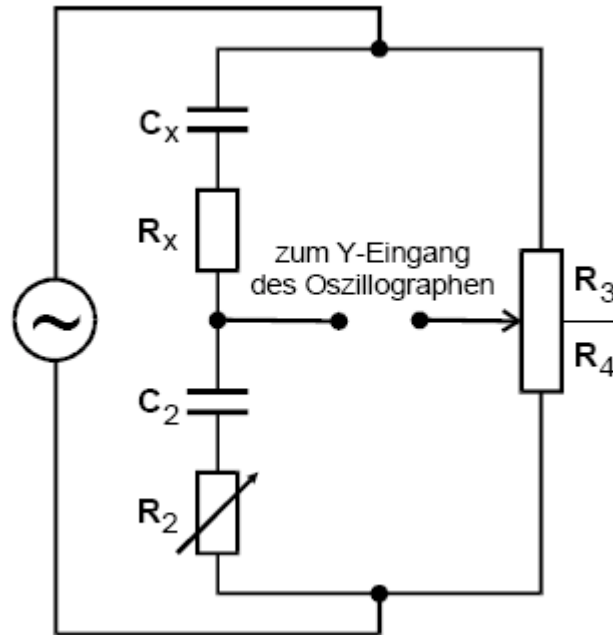


Abbildung 3: Die Kapazitätsmessbrücke

Die Abgleichbedingungen lauten also hierbei:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \text{ und } C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}$$

1.1.3 Induktivitätsmessbrücke

Analog zu 1.1.2 treten auch bei der Induktivität Wärmeverluste auf die ebenso durch ein Ersatzschaltbild mit einem in Reihe geschalteten ohm'schen Widerstand dargestellt werden. Die reale Induktivität ist somit:

$$Z_{L_{real}} = R + i\omega L$$

Auch hier wird zur Messung ein zweiter Abstimmfreiheitsgrad hinzu gezogen.

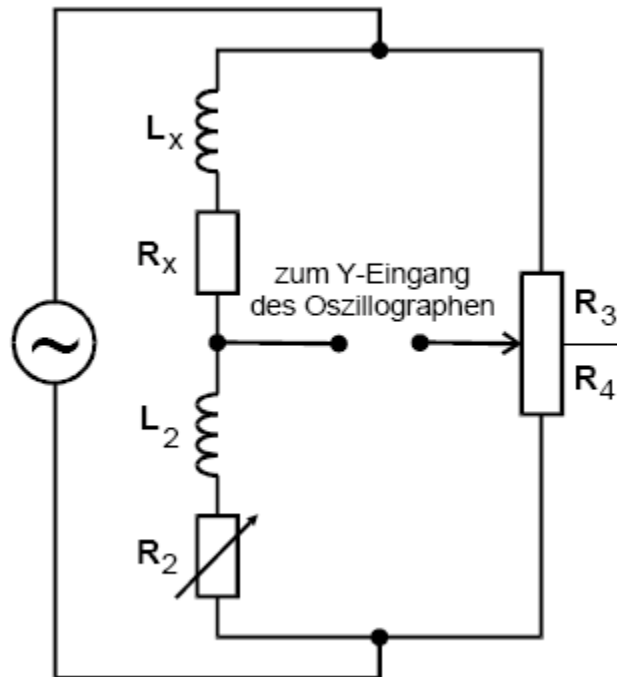


Abbildung 4: Die Induktivitätsmessbrücke

Die Abgleichbedingungen lauten hierbei:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \text{ und } L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4}$$

1.1.4 Induktivitätsmessung mittels Maxwell-Brücke

In dieser Schaltung haben die Widerstandsoperatoren die Gestalt:

$$Z_1 = R_x + i\omega L_x \text{ und } \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R_4} + i\omega C_4$$

Daraus folgen schnell die Abgleichbedingungen:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \text{ und } L_x = R_2 R_3 C_4$$

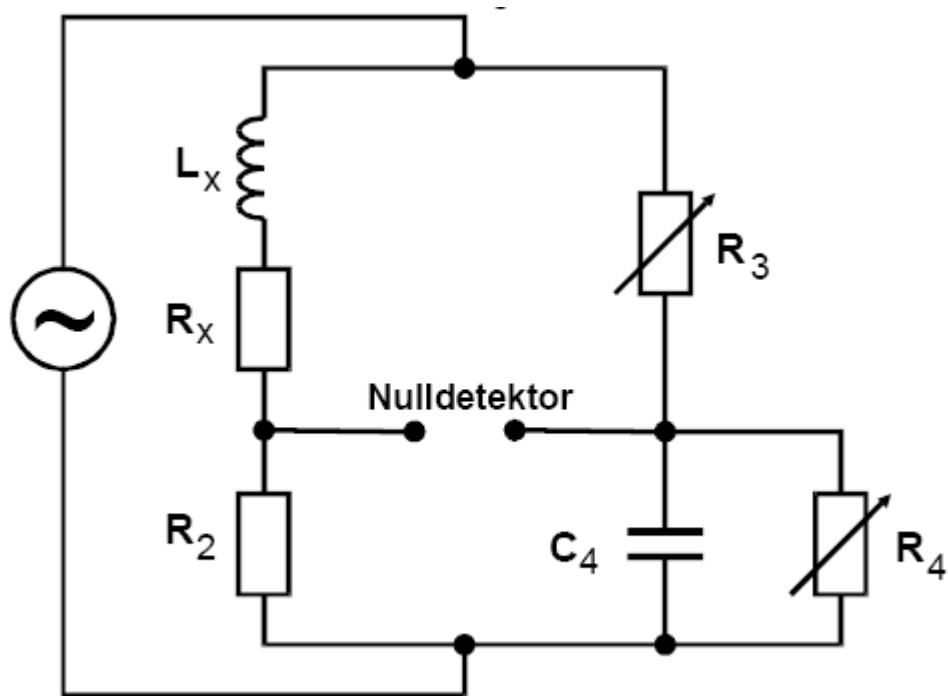


Abbildung 5: Die Maxwell-Brücke

1.2 Beschreibung spezieller Messbrücken mit Frequenzabhängigkeit

1.2.1 Die Wien-Robinson-Brücke

Neben den bisher vorgestellten Brücken zur Bestimmung von Widerständen gibt es auch Brücken die Frequenzabhängig sind. Eine davon ist die Wien-Robinson-Brücke welche keine Abgleichelemente mehr besitzt. Die Widerstände sollen alle eine geringe Toleranz aufweisen, sowie die Kapazitäten einen nur geringen Verlust besitzen.

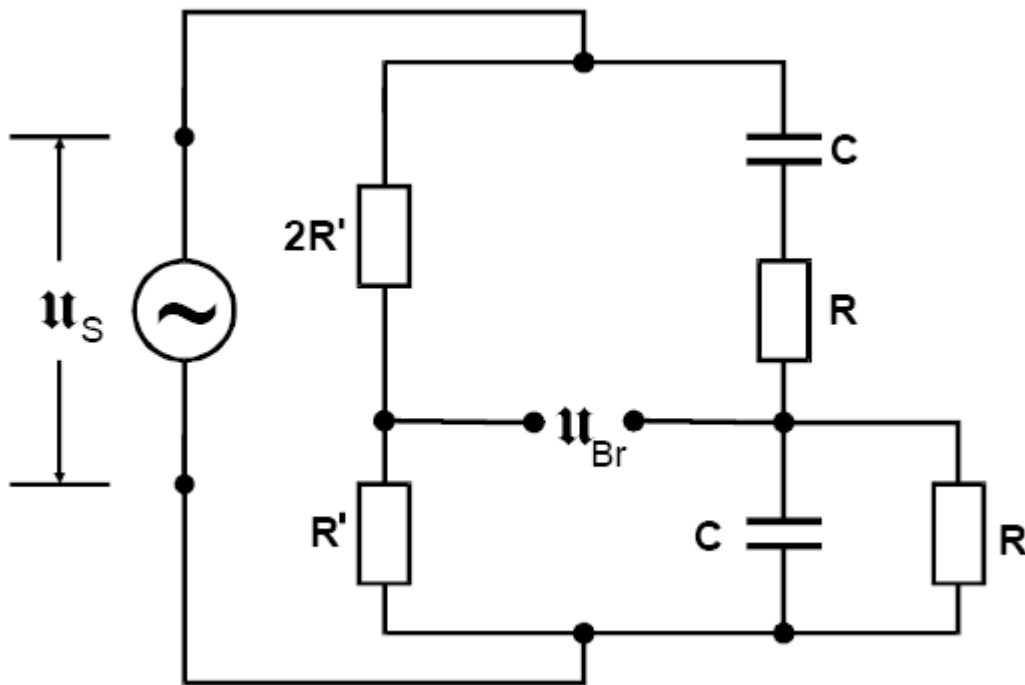


Abbildung 6: Die Wien-Robinson-Brücke

Durch die Kirchhoffschen Gesetze bekommt man schnell

$$\left| \frac{U_{br}}{U_s} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9 \{ (1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9 \omega^2 R^2 C^2 \}}$$

Damit verschwindet die Brückenspannung sobald $\omega = \omega_0$ mit $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ist. Führt man nun das Frequenzverhältnis $\Omega := \omega/\omega_0$ ein erhält man:

$$\left| \frac{U_{br}}{U_s} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}$$

Die Kurve des Quotienten aus Brücken- und Speisespannung, aufgetragen gegen Ω geht in der Theorie bei ω_0 durch null, doch in der Praxis erreicht sie nur ein Minimum. Diese Restspannung besteht aus den sogenannten Oberwellen. Ihr Verhältnis zur Grundwelle bezeichnet man als Klirrfaktor:

$$k := \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{U_1}$$

mit der Amplitude der Grundwelle (U_1) und den Amplituden der n-ten Oberwellen (U_n).

Dies sind Frequenzen, die der Generator neben der gewünschten Frequenz erzeugt.

2 Auswertung und Durchführung

Im folgenden werden Durchführung sowie Auswertung der einzelnen Versuche beschrieben. Der Aufbau der einzelnen Schaltungen ist dem Theorieteil zu entnehmen. Dort finden sich auch die Formeln, die wir für die Bestimmung der unbekannt Bauteile benutzt haben.

2.1 Widerstandsmessung mit der Wheatstone'schen Brücke

Mit der oben angegebenen Formel ermittelten wir den unbekannt Widerstand "Wert10" mit den in der Tabelle angegebenen Referenzwiderständen. Die Messung erfolgte bei einer Wechselspannung von 1 V bei einer Frequenz von 18 Hz (allerdings unerheblich für den Versuch). R_2 ist ein normaler Ohmscher Widerstand während R_3 und R_4 durch ein Potentiometer gebildet werden ($R_4 = 1000 - R_3[\Omega]$).

$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	$\sigma_{R_x}[\Omega]$
332	549,5	450,5	405,0	2,025
664	377,5	622,5	402,0	2,168
1000	287,5	712,5	403,5	2,173

Tabelle 1: Bestimmung von R_x mit der Wheatstone'schen Brücke

Durch die unsystematische Abweichung des Potentiometers liegt die Abweichung von R_x bei $\pm 0,5\%$. Der Fehler der Referenzbauteile ist mit $\pm 0,2\%$. Nach Gauß gilt für den Fehler:

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{(R_2 \sigma_{pot})^2 + \left(\frac{R_3}{R_4} \sigma_{ref}\right)^2}$$

mit hier für $r_{pot} = 0,005$ und $r_{ref} = 0,002$ für:

$$\sigma_{pot} = \frac{R_3}{R_4} r_{pot} \text{ und } \sigma_{ref} = R_2 r_{ref}$$

Um nun den Wert für den Widerstand "14" zu ermitteln wurde über alle drei Messungen gemittelt und es ergibt sich der Wert $R_x = 403,5 \pm 2,122 \Omega$

2.2 Kapazitätsbestimmung mit der Kapazitätsmessbrücke

Analog zur Wheatstone'schen Messbrücke verwenden wir hier die Brückenschaltung zur Bestimmung einer Kapazität bzw. einer reellen Kapazität, die auch dielektrische Verluste aufweist. Als idealisierte Kapazität kam der Kondensator "Wert 18" zum Einsatz während für die reelle Kapazität das Bauteil "Wert 14" verwendet wurde. Die folgende Tabelle zeigt wieder die Ergebnisse der Messreihen bei einer Wechselspannungen von 1 V mit einer Frequenz von 22 kHz.

$C_2[\mu F]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$C_x[\mu F]$	$\sigma_{C_x}[\mu F]$
0,399	577,0	423,0	0,293	0,0242
0,994	772,5	227,5	0,293	0,0016
0,597	672	328	0,291	0,0452

Tabelle 2: Bestimmung einer idealen Kapazität

Gemittelt mit Fehler gibt sich für $C_x = 0,2923 \pm 0,0237 \mu F$

$C_2[\mu F]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	$C_x[\mu F]$	$\sigma_{C_x}[\mu F]$
0,597	327,5	595,0	405,0	481,1	0,406	0,0533
0,399	444,0	519,5	480,5	480,0	0,369	0,0508
0,399	382,5	572,5	427,5	512,2	0,298	0,0457

Tabelle 3: Bestimmung einer verlustbehafteten Kapazität

Wir führten noch eine weiter Messung (siehe Messprotokoll) durch. Diese jedoch bei einer Frequenz von lediglich 200 Hz. Aufgrund der stark abweichenden Werte haben wir dieses Ergebnis verworfen.

Gemittelt mit Fehler gibt sich für $C_x = 0,3577 \pm 0,0499 \mu F$

Analog zu 2.1 wird auch hier wieder Gauß genutzt um bei gleichen Abweichungen die Fehler zu errechnen:

$$\sigma_{C_x} = \sqrt{\left(C_2 \frac{1}{(R_3/R_4)^2} \sigma_{pot}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_3/R_4} \sigma_{ref}\right)^2}$$

2.3 Induktivitätsbestimmung mit der Induktivitätsmessbrücke

Analog zu den beiden vorangegangenen Schaltungen wird hier die Induktivität sowie der ohmsche Widerstand einer Spule ("Wert 16") ermittelt. Die Messung erfolgte bei einer Wechselspannung von 1 V der Frequenz 4,75 kHz.

$L_2[mH]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	$L_x[mH]$
14,6	98	775	225	337,6	50
27,5	186	646	354	339,9	50

Tabelle 4: Bestimmung einer Spule mit Induktivitätsmessbrücke

2.4 Induktivitätsbestimmung mit der Maxwell-Brücke

Die bereits oben vermessene Spule wird nun erneut mit der Maxwell-Brücke bestimmt. Dabei ist deutlich zu erkennen dass die ermittelten Größen sehr eng beieinander liegen. Die Messung erfolgt bei einer Spannung der Frequenz 200 Hz der Amplitude 1 V.

$C_4[\mu F]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	$L_x[mH]$
0,994	1000	53	156	397,7	50
0,994	664	73	143	339,0	48

Tabelle 5: Bestimmung einer Spule mit Maxwell-Brücke

2.5 Die Wien-Robinson-Brücke

Bei der Wien-Robinson-Brücke maßen wir die Größe der Brückenspannung, sowie die Speisespannung des Netztes. Dabei variierten wir die Frequenz des Generators von 20 bis 30.000 Hz. Die Messergebnisse und ein Diagramm, daß zusätzlich den theoretisch ermittelten Verlauf der Brückenspannung darstellt, folgen auf der nächsten Seite. Dabei fällt auf, daß Theorie und Praxis recht nahe beieinander liegen. Größeren Ungenauigkeiten treten erst bei hohen Frequenzen auf.

$\nu[\frac{1}{s}]$	Ω	$U_{Br}[V]$	$U_S[V]$	$\frac{U_{Br}}{U_S}$	$\frac{U_{Br}}{U_S}Theorie$
20	0,037	0,25	0,76	0,329	0,331
40	0,074	0,245	0,77	0,318	0,324
60	0,111	0,24	0,77	0,312	0,312
100	0,185	0,215	0,75	0,287	0,282
200	0,37	0,15	0,76	0,197	0,193
400	0,741	0,049	0,75	0,065	0,063
500	0,926	0,012	0,75	0,016	0,017
540	1	0,00048	0,75	0,006	0
550	1,019	0,006	0,74	0,008	0,004
600	1,111	0,017	0,74	0,023	0,024
1000	1,852	0,09	0,7	0,129	0,181
2000	3,704	0,16	0,68	0,235	0,531
4000	7,407	0,19	0,66	0,288	0,358
6000	11,111	0,2	0,66	0,303	0,343
10000	18,519	0,21	0,65	0,323	0,337
20000	37,037	0,21	0,62	0,339	0,334
30000	55,556	0,21	0,62	0,339	0,334

Tabelle 6: Frequenzabhängiges Verhalten einer Wien-Robinson-Brücke

2.6 Klirrfaktormessung

Zur Bestimmung des Klirrfaktors nehmen wir zur Vereinfachung lediglich die Existenz der zweiten Oberwelle an. Damit ergibt sich dann der Klirrfaktor

$$k := \frac{U_2}{U_1}$$

Wobei als U_1 dabei die Speisespannung des Generators in die Gleichung eingeht. Um jedoch die Spannung U_2 zu erhalten müssen wir die Brückenspannung (bei ν_0) durch einen aus Gleichung 19 der Versuchsanleitung (vgl. auch Theorieteil) zu ermittelnden Faktor (für $\Omega = 2$) dividieren. $U_2 = U_{Br}/f(2)$. Somit erhalten wir:

$$k := \frac{U_{Br}}{U_1 f(2)}$$

Mit den gemessenen Werten (vgl. Tabelle 6) und dem Faktor aus Gleichung 19 erhalten wir somit für den Klirrfaktor

$$k := \frac{0,00048V}{0,75 * 0,022V} = 0,029$$

Somit ergibt sich ein Klirrfaktor von 1,28%.