

# Physik III - Anfängerpraktikum- Versuch 104

Sebastian Rollke (103095) und Daniel Brenner (105292)

21. September 2005

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Zielsetzung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>3</b>
3.1	Messung der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger . . . . .	3
3.2	Messung der Schallgeschwindigkeit $c$ über die Wellenlänge $\lambda$ . . . . .	4
3.3	Messung der Frequenz . . . . .	4
3.4	Messung der Frequenz über die Schwebungsmethode . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Fehlerrechnung . . . . .	5
4.2	Stichprobenfehler . . . . .	6
4.3	Einleitung . . . . .	6
4.4	Wellenlängenmessung . . . . .	7
4.5	Direkte Frequenzmessung . . . . .	8
4.6	Schwebungsmessung . . . . .	9
4.7	Berechnung von $1/\lambda$ . . . . .	10
4.8	Ergebnisüberprüfung mittels Student'schem T-Test . . . . .	13
4.9	Fehlerbetrachtung . . . . .	13

# 1 Einleitung und Zielsetzung

Der Doppler-Effekt ist eine Beobachtung die entsteht wenn sich Quelle und Empfänger einer Welle relativ zueinander bewegen. Unter dieser Voraussetzung kann man eine Verschiebung der Frequenzen zu ihrer jeweiligen Ruhfrequenz messen. Ziel des Versuches ist es diese Verschiebung zu ermitteln.

## 2 Theorie

Eine ruhende Quelle sendet eine Welle der Frequenz  $\nu_0$  aus welche mit gleicher Frequenz beim Empfänger wahrgenommen wird. Wenn nun der Empfänger sich mit der Geschwindigkeit  $v$  auf den Sender zubewegt, so überstreicht er in der Zeit  $\Delta t$

$$\Delta z = \frac{\Delta t v}{\lambda_0} \quad (1)$$

Wellenzüge (mit der Wellenlänge  $\lambda_0$ ). Da am ruhenden Empfänger genau

$$\Delta n = \Delta t \nu_0 \quad (2)$$

Schwingungen vorbeilaufen registriert der bewegte Beobachter insgesamt beide Wellenzüge:

$$\Delta n + \Delta z = \Delta t \left( \nu_0 + \frac{v}{\lambda_0} \right) \quad (3)$$

Mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle ( $c = \nu_0 \lambda_0$ ) und der Tatsache das die Frequenz eines Wellenvorgangs allgemein die Anzahl der Schwingungen pro Zeit ist, kann man die Frequenz am bewegten Empfänger auch als

$$\nu_E = \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \quad (4)$$

ausdrücken.

Nimmt man nun an, das sich der Empfänger von der Quelle fortbewegt, so erscheint nach der Definition der Wellenlänge, als Abstand zweier Punkte mit gleicher Phase, die Wellenlänge um das Stück

$$\Delta \lambda = \frac{v}{\nu_0} \quad (5)$$

verkürzt. Weiter wird ein Wellenvorgang mit der Frequenz

$$\nu_Q = \frac{c}{\lambda_0 - \Delta \lambda} \quad (6)$$

wahrgenommen. Wiederum unter Berücksichtigung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ergibt sich dafür

$$\nu_Q = \nu_0 \frac{1}{1 - v/c} \quad (7)$$

Entwickelt man dies nun in einer Reihe nach Potenzen von  $v/c$  so ergibt sich schließlich:

$$\nu_Q = \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \right) = \nu_E + \nu_0 \left( \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \right) \quad (8)$$

Leicht sieht man daran, dass für  $v \ll c$  der Unterschied zwischen  $\nu_E$  und  $\nu_Q$  verschwindend klein wird.

### 3 Durchführung

#### 3.1 Messung der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger

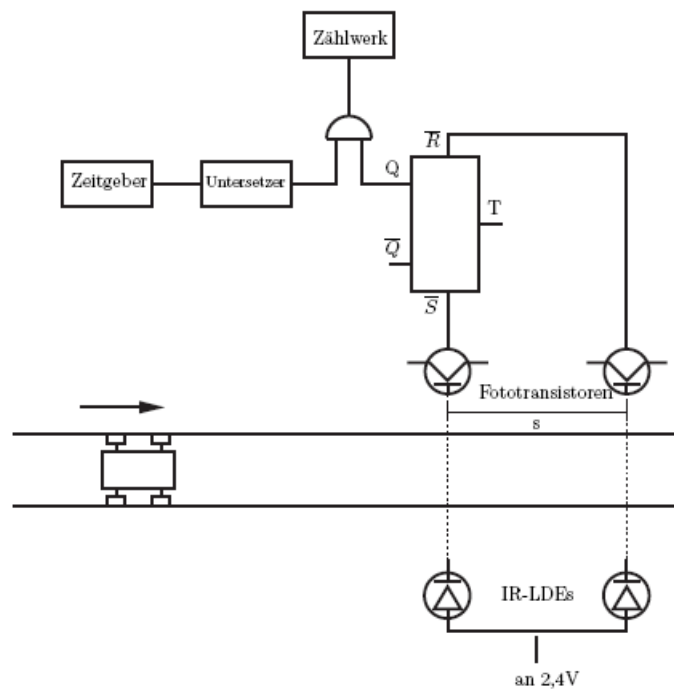


Abbildung 1: Aufbau zur Messung der Geschwindigkeiten

Gemessen werden soll die Geschwindigkeit des Wagens in der Führung. Dieses wird auf der Strecke zwischen den beiden Lichtschranken ermittelt. Beim durchfahren der ersten Lichtschranke wird mit Hilfe der Torstufe das Signal des Zeitbasisgenerators durchgelassen und im Zählwerk ausgenommen. Dies passiert, indem die erste Lichtschranke beim durchfahren einen Low-Impuls sendet, solange die Lichtschranke unterbrochen wird. Diese Low Impuls am S-Eingang der bi-stabilen Kippstufe bewirkt, dass am Q-Ausgang ebenfalls ein Low-Impuls ausgegeben wird, der

damit über ein UND-Gatter das Zeitsignal durchlässt und somit das Zählwerk startet. Nach durchfahren der Lichtschranke ändert sich der Q-Ausgang wieder auf High, was aber die Torstufe nicht schließt. Das durchfahren der zweiten Lichtschranke schließt die Torstufe wieder durch das Implizieren eines LOW Impulses am R-Eingang. Hierdurch wird wieder der Q-Ausgang auf LOW gesetzt, was bewirkt das das Zählwerk kein Signal mehr bekommt. Hierdurch wird eine präzise Zeitangabe für die Dauer der Fahrt ermittelt. Die Entfernung der beiden Lichtschranken wird anschließend mit einem Maßband ausgemessen.

### 3.2 Messung der Schallgeschwindigkeit $c$ über die Wellenlänge $\lambda$

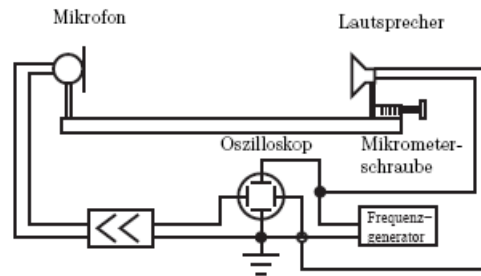


Abbildung 2: Aufbau zur Messung der Schallgeschwindigkeit bei Raumtemperatur

Die Wellenlänge wird über den in Abbildung 2 dargestellten Aufbau realisiert. Sowohl das Signal des Sinusgeneratoros (für die Y-Komponente) als auch das verstärkte Signal des Mikrophons (für die X-Komponente) werden auf einem Oszilloskop dargestellt. Dadurch entstehen sogenannte Lissajous-Figuren. Nun kann mit Hilfe der Mikrometerschraube die Position des Senders und somit die relative Entfernung beider Objekte sehr präzise geändert werden. Wenn sich nun beide Wellensignale genau um  $180^\circ$  in ihrer Phase überlagern, so entartet die Lissajous-Figur zu einer Geraden. Die Veränderung der relativen Längen diese Positionen können nun an der Mikrometerschraube abgelesen werden.

### 3.3 Messung der Frequenz

Zur Messung der Frequenz wird eine Schaltung nach Abbildung 3 aufgebaut. Der Lautsprecher mit dem Sendersignal bewegt sich nun relativ zum Empfänger in den vorrausgehend ermittelten Geschwindigkeiten. Wird die Lichtschranke durchfahren, sprich ist der Wagen in gleichmäßiger Bewegung, so öffnet sich für eine voreingestellte Zeit die Torstufe. Da die Impulse des Mikrophons verstärkt und in einen Rechteckimpuls gewandelt werden liegt hiermit an dem ersten Eingang des UND-Gatters ein HIGH Potential. Das Zählwerk wird gestartet wenn am zweiten Eingang ebenfalls ein HIGH Potential gegeben ist. Das zweite Potential wird ähnlich wie bei der Bestimmung der Wagengeschwindigkeit mit Hilfe einer Bistabilen Kippstufe geschaltet. Sobald die Lichtschranke durchfahren wird, schaltet der Q-Ausgang der bistabilen Kippstufe auf LOW, bei dem verlassen der Lichtschranke ändert sich nun das Potetnial auf HIGH und öffnet so das UND-Gatter. Hierdurch bekommt nun der Untersetzer Impulse die im abstand von  $1 \mu s$  ausgesendet werden. Nach der festgelegten Anzahl an Impulsen schaltet der Untersetzer sein Ausgangspotetnial auf HIGH, wodurch die monostabile Kippstufe nun das Signal in einen LOW-Impuls invertiert. Dieser Gelangt an den R-Eingang der bistabilen Kippstufe die nun den Q-Ausgang wieder auf LOW setzt. Hierdurch wird das UND-Gatter am Zählwerk geschlossen

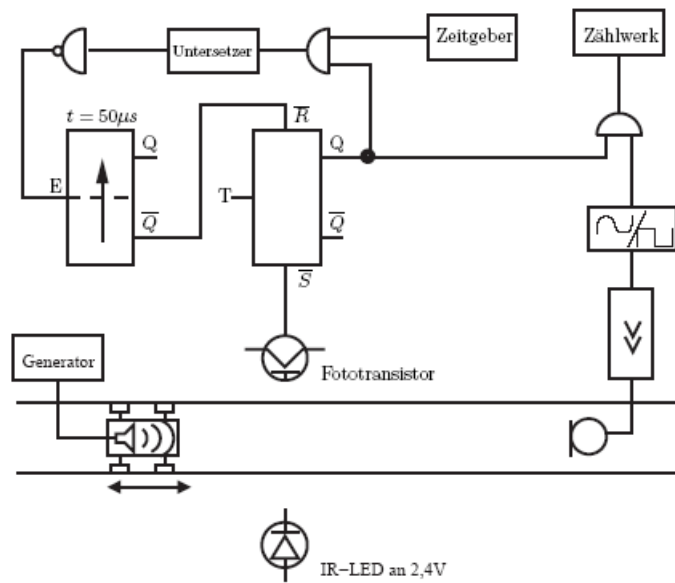


Abbildung 3: Aufbau zur Bestimmung der Frequenzänderung mit einem bewegten Sender

und die Messung beendet. Am Zählwerk kann nun direkt die Frequenz abgelesen werden. Diese Messung wird sowohl bei stehendem Wagen (hier wird die Lichtschranke per Hand betätigt) als auch in relativer Bewegung von und auf den Empfänger zu mehrfach durchgeführt.

### 3.4 Messung der Frequenz über die Schwebungsmethode

Die Messung über die Schwebung erfordert nur eine leichte Veränderung des vorhergehenden Aufbaus. Hierbei wird nun der Sender neben den Empfänger montiert und auf den Wagen ein Reflektor. Dadurch erreichen das Mikrophon sowohl die direkte Welle als auch die reflektierte Welle. Hierdurch stellt der Reflektor nun eine Schallquelle dar die sich in bezug auf den ruhenden Empfänger mit 2v bewegt. Um nun nur das Signal der Schwebung zu messen wird zusätzlich zwischen Mikrophon und den Frequenzzähler aus der vorherigen Messreihe ein Tiefpass geschaltet.

## 4 Auswertung

### 4.1 Fehlerrechnung

Wir unterscheiden zwischen relativen (r) und absoluten Fehlern (s) einer Größe x. Die relativen Fehler ergeben sich durch die einfache Beziehung:

$$r := \frac{s}{x}$$

Wir verwenden zur Fehleranalyse die folgenden Gleichungen:

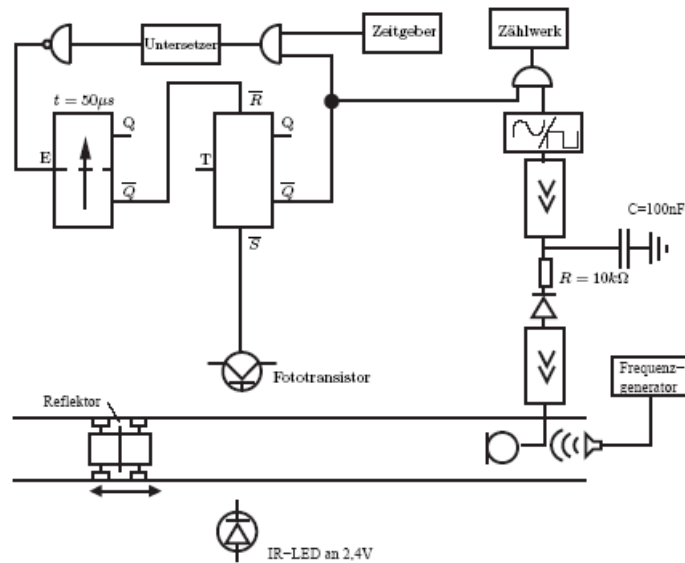


Abbildung 4: Aufbau zur Messung der Frequenzänderung über die Schwebungsfrequenz

## 4.2 Stichprobenfehler

Bei einer Menge von Messwerten  $(x_1 \dots x_i)$  für ein- und dieselbe Größe ergibt sich der Fehler jedes einzelnen Messwertes durch die Standardabweichung  $\sigma$  dieser Stichprobe nach

$$\sigma := \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Zur Angabe des Endergebnisses einer solchen Stichprobe verwenden wir das arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i$$

Werden Werte durch bereits fehlerbehaftete Werte berechnet, ergibt sich dieser Fehler durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung nach:

$$r = \sqrt{r_{x_1}^2 + r_{x_2}^2 + \dots + r_{x_i}^2}$$

Lineare Regression sowie die Berechnung der dabei auftretenden Fehler ergeben sich durch das PC-Programm Gnuplot.

## 4.3 Einleitung

Zuerst bestimmen wir die Ruhfrequenz  $\nu_0$  der Schallquelle. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 1 zu finden. Weiterhin bestimmen wir den Abstand  $L = 44,6$  [cm] der beiden Lichtschranken. Zudem definieren wir

$$\Delta\nu := |\nu_Q - \nu_0|$$

Mit der Ruhfrequenz  $\nu_0$  und der gemessenen Frequenz  $\nu_Q$ . Wie später noch gezeigt wird, ist es hierbei egal ob sich die Quelle oder der Empfänger bewegt.

$\nu_0$ [Hz]	
20742	
20743	
20742	
20742	
20742	
20742,2	Mittelwert
0,2	+/-
0,001%	rel. Fehler

Tabelle 1: Messung der Ruhfrequenz

Zusätzlich bestimmen wir die Relativgeschwindigkeit des Wagens zur Schallquelle durch Laufzeitmessung (vgl. Tabelle 2).

Gang	Laufzeiten [ms]					MW. [ms]	+/-	r	v [m/s]	+/-	r
6	9109	9190	9107	9019	9029	9090,80	31,15	0,34%	0,05	0,0002	0,34%
12	4525	4517	4632	4496	4502	4534,40	24,94	0,55%	0,10	0,0005	0,55%
18	2993	2994	2994	2988	2990	2991,80	1,20	0,04%	0,15	0,0001	0,04%
24	2244	2236	2243	2254	2239	2243,20	3,06	0,14%	0,20	0,0003	0,14%
30	1798	1808	1796	1797	1802	1800,20	2,20	0,12%	0,25	0,0003	0,12%
36	1495	1491	1493	1490	1495	1492,80	1,02	0,07%	0,30	0,0002	0,07%
42	1285	1286	1274	1278	1284	1281,40	2,32	0,18%	0,35	0,0006	0,18%
48	1125	1119	1119	1124	1118	1121,00	1,45	0,13%	0,40	0,0005	0,13%
54	992	994	988	991	990	991,00	1,00	0,10%	0,45	0,0005	0,10%
60	892	890	894	898	902	895,20	2,15	0,24%	0,50	0,0012	0,24%

Tabelle 2: Relativgeschwindigkeit v des Wagens

Man kann nun schon erkennen, daß man nicht zwischen den beiden Gleichungen für bewegte Quelle, bzw. bewegten Empfänger unterscheiden muß. Beide Gleichungen unterscheiden sich lediglich durch das letzte quadratische Glied. Somit ergibt sich für die Differenz  $\Delta\nu$  der beiden Gleichungen:

$$\Delta\nu = \left(\frac{v_{max}}{c}\right)^2 \cdot \nu_0 = 0,04Hz$$

Diese Differenz übersteigt dabei deutlich das Auflösungsvermögen unserer Messapparatur, so daß nicht zwischen den beiden Gleichungen unterschieden werden muß.

#### 4.4 Wellenlängenmessung

Wie in der Durchführung beschrieben messen wir mittels Oszilloskop den Wagnervorschub von einer auf dem Oszilloskop zu sehenden Gerade zur nächsten. Da wir so lediglich  $180^\circ$  (bzw.  $\lambda/2$ ) Phasenverschiebungen messen, müssen wir die ermittelte Differenz noch einmal verdoppeln um

Pos.1 [cm]	Pos.2[cm]	$\lambda$ [cm]
4,879	4,119	1,52
4,123	3,265	1,72
3,249	2,490	1,52
2,491	1,521	1,94
1,524	0,654	1,74
0,650	1,527	1,75
	Mittelwert	1,70
	+/-	0,07
	rel. Fehler	4,24%

Tabelle 3: Wellenlängenmessung

die Wellenlänge zu ermitteln. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 3 aufgelistet.

Aus der Wellenlängenmessung sowie der bereits bestimmten Ruhfrequenz ergibt sich die Schallgeschwindigkeit in Luft zu:

$$c = \nu \cdot \lambda = (352 \pm 5) \text{ m/s}$$

Der Fehler ergibt sich dabei durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung nach:

$$r_c = \sqrt{r_c^2 + r_\lambda^2}$$

#### 4.5 Direkte Frequenzmessung

Wir in der Durchführung beschrieben bestimmen wir die Frequenzänderung bei der Bewegung des Schlittens relativ zur Schallquelle. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 4 zu finden. Die in der Tabelle aufgelisteten Geschwindigkeiten sind natürlich fehlerbehaftet (vgl. Tabelle 2). Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir jedoch auf eine gesonderte Auflistung.

v[m/s]	Frequenz [Hz]					Mittelwert	+/-	rel. Fehler
0,05	20745	20745	20744	20744	20745	20744,6	0,2	0,001%
0,15	20751	20751	20751	20751	20751	20751,0	0,0	0,000%
0,25	20757	20757	20757	20756	20757	20756,8	0,2	0,001%
0,35	20763	20763	20763	20763	20763	20763,0	0,0	0,000%
0,45	20769	20769	20768	20769	20769	20768,8	0,2	0,001%
-0,05	20739	20739	20739	20739	20739	20739,0	0,0	0,000%
-0,15	20733	20733	20732	20733	20732	20732,6	0,2	0,001%
-0,25	20727	20727	20726	20727	20727	20726,8	0,2	0,001%
-0,35	20721	20721	20721	20721	20721	20721,0	0,0	0,000%
-0,45	20715	20714	20715	20715	20715	20714,8	0,2	0,001%

Tabelle 4: Frequenzmessung mittels direkter Methode

Angemerkt werden muss noch, das aufgrund der geringen Auflösung der Messung einige Werte keinen messbaren Fehler aufweisen.



## 4.6 Schwebungsmessung

Analog zur direkten Messung sind die erhaltenen Messergebnisse für die Schwebungsmethode in Tabelle 5 zu finden. Wieder wird auf eine gesonderte Auflistung der Geschwindigkeitsfehler verzichtet. Sicherlich sind auch hierbei die gemessenen Werte fehlerbehaftet, jedoch können wir aufgrund der geringen Auflösung der Messung (die Werte konnten nur auf eine gültige Stelle bestimmt werden) keine Aussage über diesen machen.

v[m/s]	$\Delta\nu$ [Hz]					Mittelwert
0,10	7	7	7	7	7	7
0,30	19	19	19	19	19	19
0,50	31	31	31	31	31	31
0,70	43	43	43	43	43	43
0,90	55	55	55	55	55	55

Tabelle 5: Schwebungsmessung

## 4.7 Berechnung von $1/\lambda$

Wir erhalten  $1/\lambda$  direkt aus der Wellenlängenmessung.

$$1/\lambda_{Wellenl.} = (59 \pm 2)1/m$$

Der absolute Fehler ergibt sich dabei aus dem relativen Fehler von  $\lambda$ .

Die Faktoren  $1/\lambda$  aus der direkten Frequenzmessung sowie der Schwebungsmessung erhält man durch lineare Regression, wenn man die Geschwindigkeit  $v$  gegen  $\Delta\nu$  aufträgt (vgl. Abb. 5 und Abb. 6 sowie Tabelle 6 und 7).

v[m/s]	+/-	$\Delta\nu$ [Hz]	+/-
0,05	1,68E-004	2,4	0,24
0,15	5,98E-005	8,8	0,00
0,25	3,03E-004	14,6	0,20
0,35	6,29E-004	20,8	0,00
0,45	4,54E-004	26,6	0,20
-0,05	1,68E-004	-3,2	0,00
-0,15	5,98E-005	-9,6	0,24
-0,25	3,03E-004	-15,4	0,20
-0,35	6,29E-004	-21,2	0,00
-0,45	4,54E-004	-27,4	0,20

Tabelle 6: Regressionswerte (Direkte Methode)

v[m/s]	+/-	$\Delta\nu$
0,10	3,36E-004	7
0,30	1,20E-004	19
0,50	6,06E-004	31
0,70	1,26E-003	43
0,90	9,08E-004	55

Tabelle 7: Regressionswerte (Schwebungsmessung)

Für die Regressionsgerade gilt die Funktion

$$\nu = v \cdot (1/\lambda) + b$$

Uns interessiert nur die Steigung der Regressionsgeraden, die somit genau  $1/\lambda$  entspricht. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 1/\lambda_{Direkt} &= (59,9 \pm 0,2)1/m \\ 1/\lambda_{Schwebung} &= (60,3 \pm 0,2)1/m \end{aligned}$$

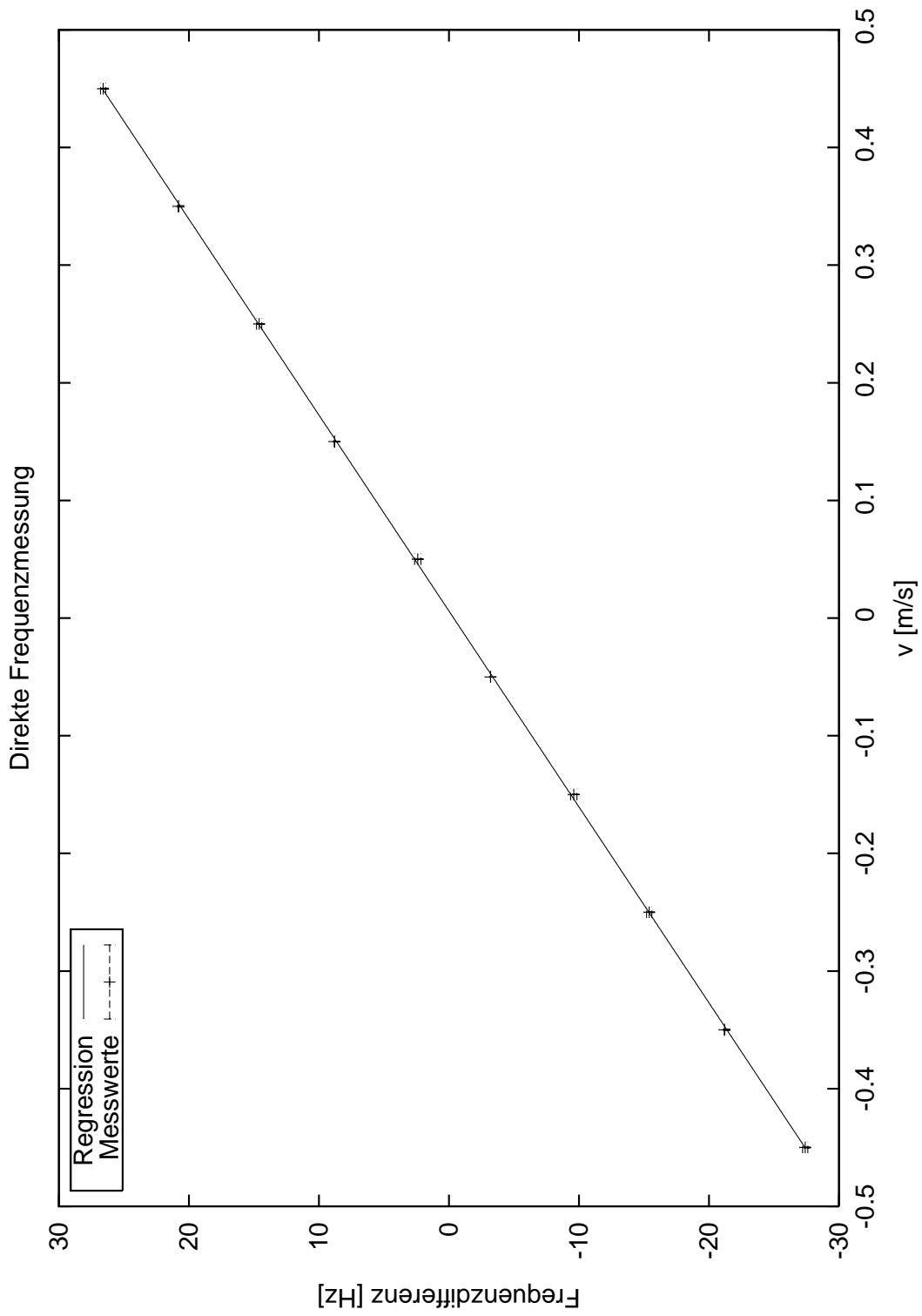


Abbildung 5: Direkte Frequenzmessung

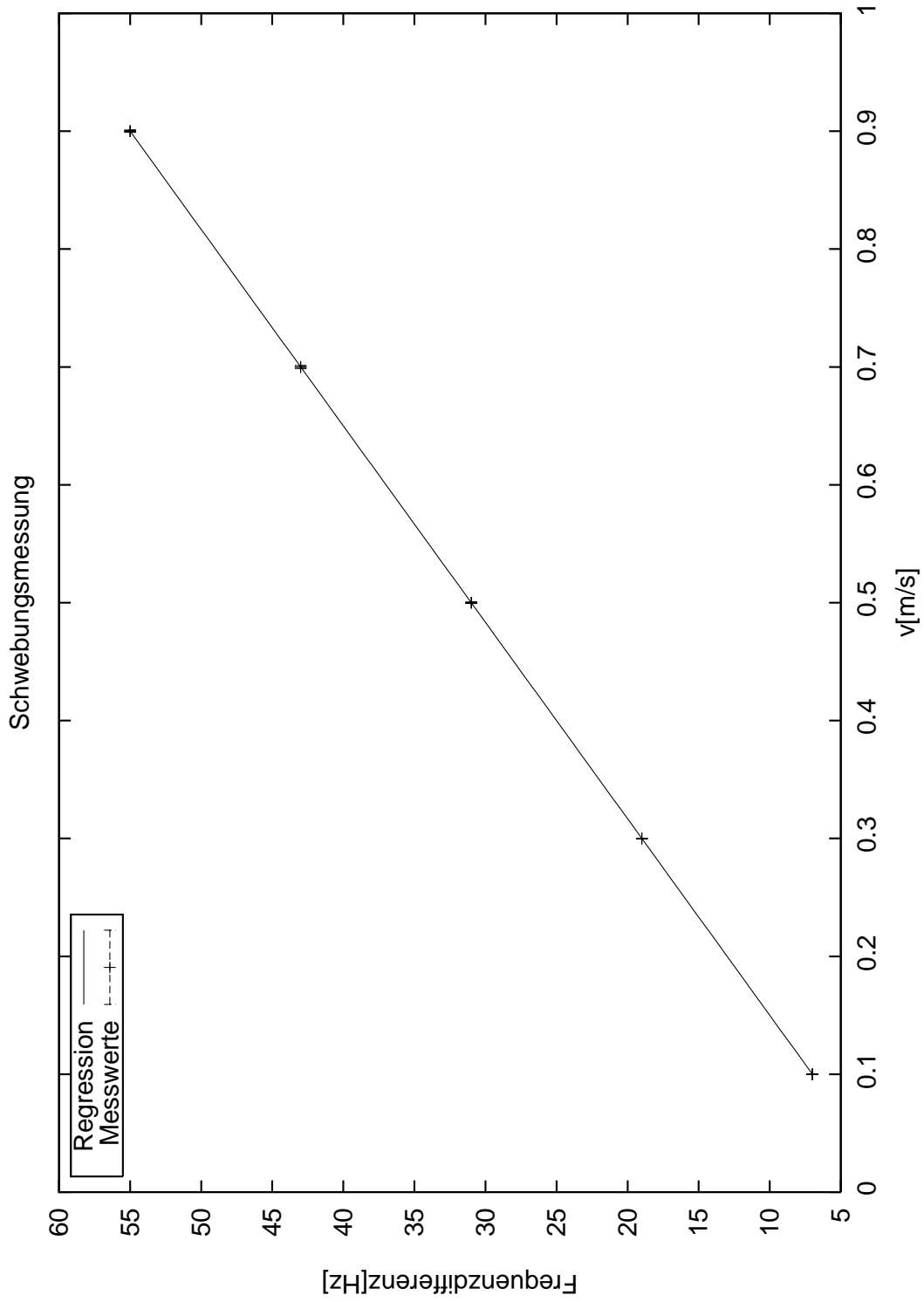


Abbildung 6: Schwebungsmessung

## 4.8 Ergebnisüberprüfung mittels Student'schem T-Test

Der Studentsche t-Test wird benutzt, wenn mehrere Messerfolgen für ein und dieselbe Größe vorliegen und bestimmt ob zwischen zwei Messungen ein systematischer Fehler vorliegt. Dazu wird ein t-Faktor folgendermaßen bestimmt:

$$t = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b}{\sigma_D}$$

Dabei ist

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{s_a^2(n_a - 1) + s_b^2(n_b - 1)}{n_a + n_b - 2} \cdot \frac{n_a + n_b}{n_a \cdot n_b}}$$

wobei  $\bar{x}_a, \bar{x}_b$  die Erwartungswerte,  $s_a, s_b$  die mittleren Stichprobenfehler und  $n_a, n_b$  die Anzahl der Messungen der jeweiligen Messreihe a bzw. b sind.

Die  $\bar{x}_i$  sind hier die Faktoren  $1/\lambda$ , die auf verschiedene Weise ermittelt wurden. Der Freiheitsgrad  $f$  berechnet sich als  $f = n_a + n_b - 2$ ,  $\alpha$  ist das sog. Signifikanzniveau, das benötigt wird um den entsprechenden Wert der Verteilung zu bestimmen.

Zur Bestimmung benutzen wir die im Skript "Fehlerrechnung" angegebene Tabelle für die integrale Student'sche T-Verteilung.

Wir verwenden zum Vergleich der Messreihen ein Signifikanzniveau  $\alpha = 0,001$ . Somit besteht zu 99,9% ein systematischer Fehler, wenn der ermittelte  $t_s$ -Wert den tabellierten t-Wert übersteigt. Die Ergebnisse des Tests sind in der folgenden Tabelle 8 wiedergegeben.

Zur Übersichtlichkeit noch einmal die Messergebnisse:

$$\begin{aligned} 1/\lambda_{Wellenl.} &= (59 \pm 2)1/m \\ 1/\lambda_{Direkt} &= (59,9 \pm 0,2)1/m \\ 1/\lambda_{Schwebung} &= (60,3 \pm 0,2)1/m \end{aligned}$$

Wir verwendeten 5 Messungen bei der Wellenlängenmessung, 10 bei der direkten Methode sowie 5 bei der Schwebungsmethode.

	$\sigma_D$	T	Sys.Fehler	f	$t_s$
Vergleich Wellenl. : Direkt	0,081	16,848	99,99 %	14	4,140
Vergleich Wellenl. : Schwebung	0,081	13,000	99,99 %	9	4,781
Vergleich Direkt. : Schwebung	0,107	2,925	kein sys. Fehler.	13	4,221

Tabelle 8: Student'scher T-Test

## 4.9 Fehlerbetrachtung

Folgende Fehlerursachen erscheinen uns wahrscheinlich:

- Der Wagen bewegte sich bei niedrigen Geschwindigkeiten nicht kontinuierlich sondern stockte teilweise sehr stark
- Der Abstand der Lichtschranken konnte nicht sehr präzise bestimmt werden
- Die Aufhängung des Mikrofons war nicht ganz gerade ausgerichtet
- Die Position bei der die Lissajou-Figuren in Gerade ausarteten konnte nicht exakt bestimmt werden